技術社会システム

第6回：縮小・分割統治法(続き)

担当教員：蓮池 隆(はすいけ たかし）
連絡先：thasuike@waseda.jp

前回の解答です

演習5-2

- Aさんは 1 から 1,000,000 までの数字の中の一つを紙に書いて持っているとする.
- この数を「はい」か「いいえ」で答えられる質問を繰り返し質問していくことで当てる.

(例)　一の位は3ですか？　(←ちなみにこれは非効率的)

1~100,000の間に入ってますか?

- 最悪の場合でも何回以下の質問数で答えを当てることができるか?

(ヒント：ある戦略にしたがい，範囲をうまく設定しながら聞いていけばよい**(縮小統治法)**)

解答

ポイント：範囲を半分ずつに分けて聞いていく

(例)

- 数字は1から500,000までに入っていますか→はい
- 数字は1から250,000までに入っていますか→いいえ
- 250,000から500,000までに入っていますか→はい
- …

(奇数になったら，どちらかを1つ増やせばOK)

- **1回の質問で候補の数は半分ずつになる(縮小統治法)**

➡最悪 $\log_2 1000000 \fallingdotseq 19.93 \fallingdotseq 20$回 で当てることができる.

- 実はこの方法が最適であることを示すこともできる.

これも有名な問題です

例題5-3

- 外見では区別できない27枚の硬貨がある．
- この中に1枚だけ，本物の硬貨よりも軽い偽造硬貨が含まれているとする．
- このとき，重りのない天秤を使って偽造硬貨を決定する方法を述べよ．また，最悪の場合でも何回以下の試行数で偽物を当てることができるか．

解答

例題5-3

- **STEP1: 硬貨を3つのグループに等分割する**

- STEP2:グループIとグループIIを天秤に載せ，重さを比較
- STEP3: STEP2の結果はいずれかになる.
  - グループIのほうが軽い → グループIを残す
  - グループIIのほうが軽い → グループIIを残す
  - グループIとグループIIが釣り合う → グループIIIを残す

- **このとき，残されたグループ内に偽造硬貨が入っている**
  →候補の数が 1/3 になる(縮小統治法)

解答

9つになったコインを先ほどと同じように分割する！

- **STEP1: 硬貨を3つのグループに等分割する**

- STEP2:グループIとグループIIを天秤に載せ，重さを比較
- STEP3: STEP2の結果はいずれかになる.
  - グループIのほうが軽い → グループIを残す
  - グループIIのほうが軽い → グループIIを残す
  - グループIとグループIIが釣り合う → グループIIIを残す
- **このとき，残されたグループ内に偽造硬貨が入っている**
  →候補の数が 1/3 になる(縮小統治法)

解答

<u>**3つになったコインを先ほどと同じように分割する！**</u>

- **STEP1: 硬貨を3つのグループに等分割する**

- STEP2:グループIとグループIIを天秤に載せ，重さを比較
- STEP3: STEP2の結果はいずれかになる.
  - グループIのほうが軽い → グループIを残す
  - グループIIのほうが軽い → グループIIを残す
  - グループIとグループIIが釣り合う → グループIIIを残す

- **残されたコインが偽物！→よって天秤の使用回数は3回！**

まだまだ解答は続きます

演習5-4

- 外見では区別できない27枚の硬貨がある.
- この中に1枚だけ，本物の硬貨よりも重さが異なる(重いか軽いかは不明)偽造硬貨が含まれているとする.
- このとき，重りのない天秤を使って偽造硬貨を決定する方法を述べよ．また，最悪の場合でも何回以下の試行数で偽物を当てることができるか.

解答例

演習5-4

- 先ほどと同様に，27個を9個ずつ3つのグループに分ける．

- 次に，グループIとIIを天秤で比較

①Iが下に，IIが上に傾いた場合

→偽造硬貨が重いためIに入っている or 軽いためIIに入っているのどちらか

→IとIIIを比較し，Iが下に傾けば，偽造硬貨は重く，かつIに含まれていることがわかる．

IとIIIがつりあえば，偽造硬貨は軽く，かつIIに含まれていることがわかる．

解答例

演習5-4

- 先ほどと同様に，27個を9個ずつ3つのグループに分ける.

- 次に，グループIとIIを天秤で比較

  ②IとIIがつりあった場合

  →IIIに偽造硬貨が含まれていることはわかる．しかし，偽造硬貨が重いか軽いかはわからない.

  →IとIIIを比較し，Iが下に傾いた場合は，偽造硬貨が軽いことがわかる.

  Iが上に傾いた場合，偽造硬貨は重いことがわかる.

- **①,②ともに2回で，偽造硬貨がどのグループに入っているか＋それが重いかどうかまでわかる**

解答例

演習5-4

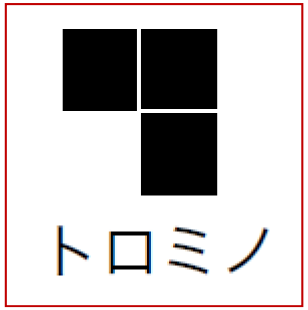
- 先ほどと同様に，27個を9個ずつ3つのグループに分ける.

- あとは偽造硬貨の入っている9個を調べればよいが，既に重いか軽いかまでもわかっているため，**演習7-1の9個の場合の話と同じ＝2回で偽造硬貨1枚を発見可能**
- よって27個の場合，**最悪でも2＋2＝4回**天秤を利用することで偽造硬貨1枚を発見することが可能.

それでは今日の演習です

例題6-1

- 以下の図1～図3のチェス盤をトロミノで重複なく覆えるか．ここでトロミノは3マスのL字ピースのことであり，黒マスは使用してはならない．



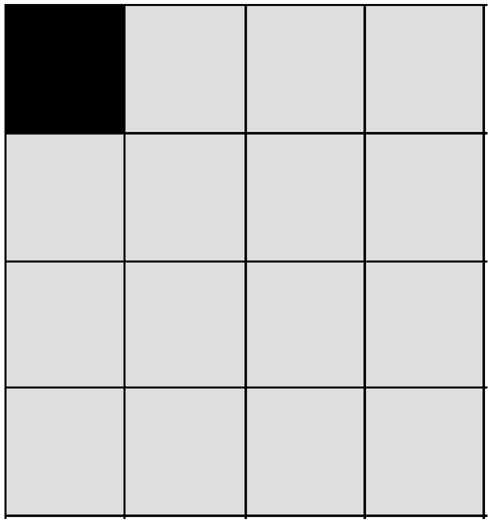


図１

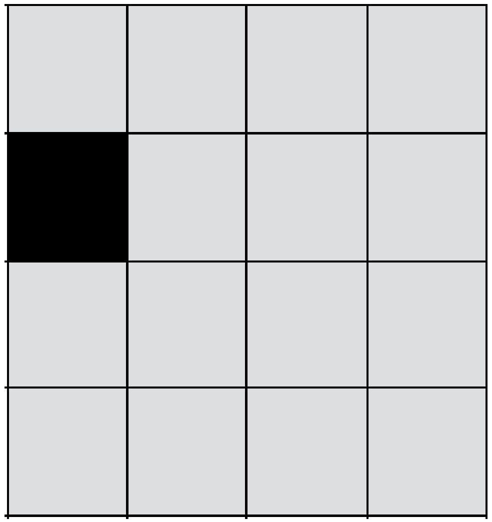


図２

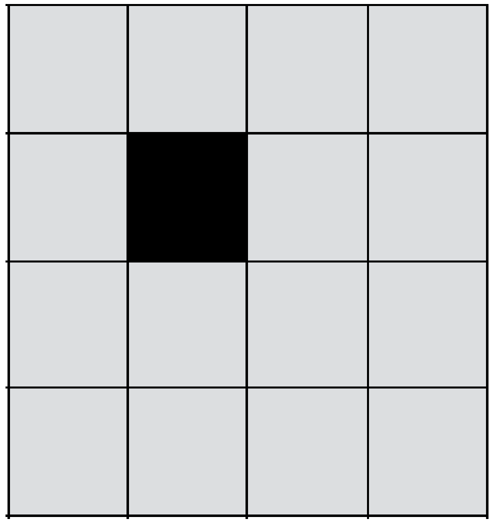
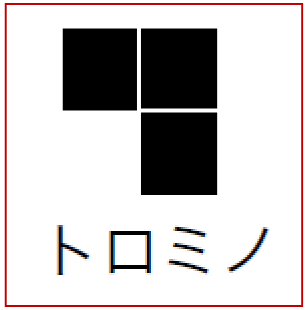


図３

解答

例題6-1

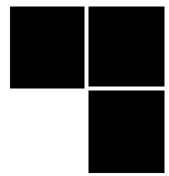
- 図1～図3全て補うことが可能！
  (解答例は黒板参照)



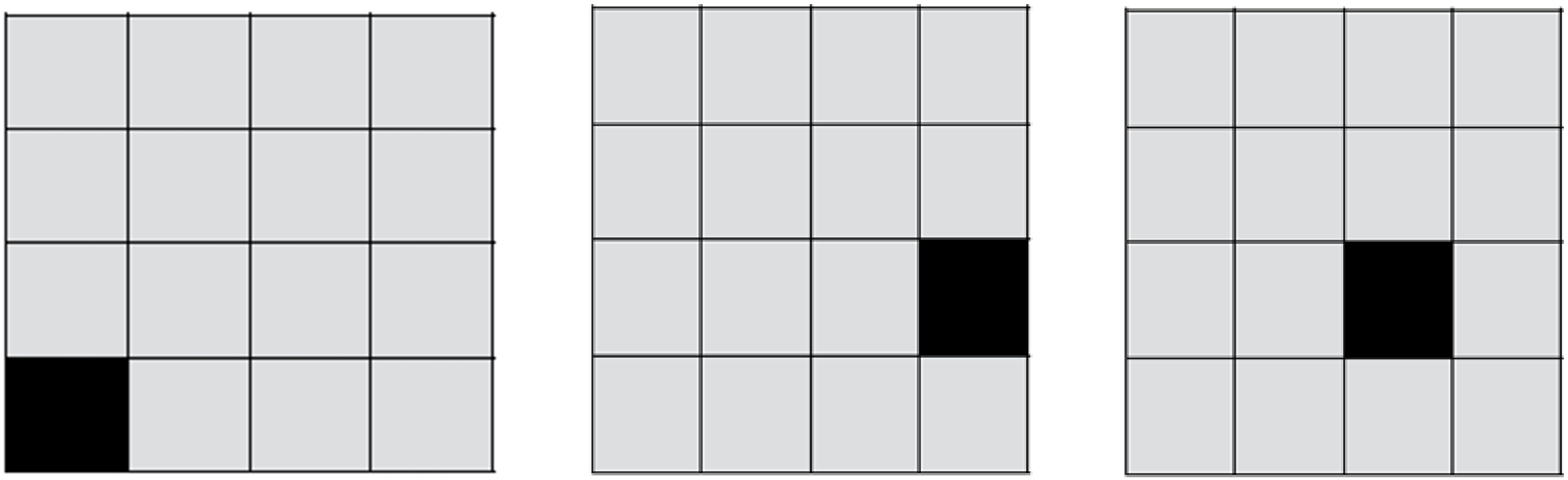
例題6-1を活かして…

<u>演習6-2</u>

- <u>1マスが欠けた **4×4 の任意のチェス盤**</u>
(以下は一例)はトロミノで重複なく覆えるか？
理由も述べなさい.



トロミノ



解答

演習6-2

- 演習6-1より 以下の図1, 図2, 図3は，トロミノで重複なく覆える.
- 1マスが欠けた4×4の任意のチェス盤は，鏡映または回転を用いて図1, 図2, 図3のいずれかに変換できる.

→対称性より1マスが欠けた 4×4 の任意のチェス盤も トロミノで覆える.

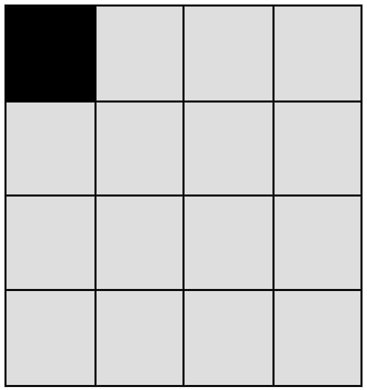


図1

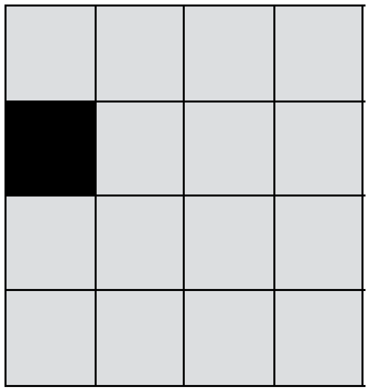


図2

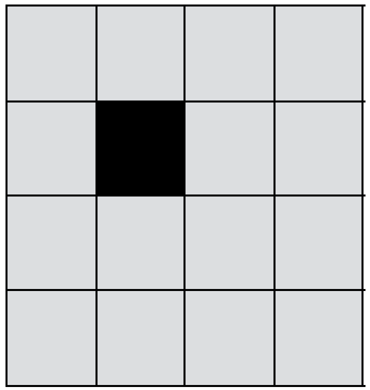
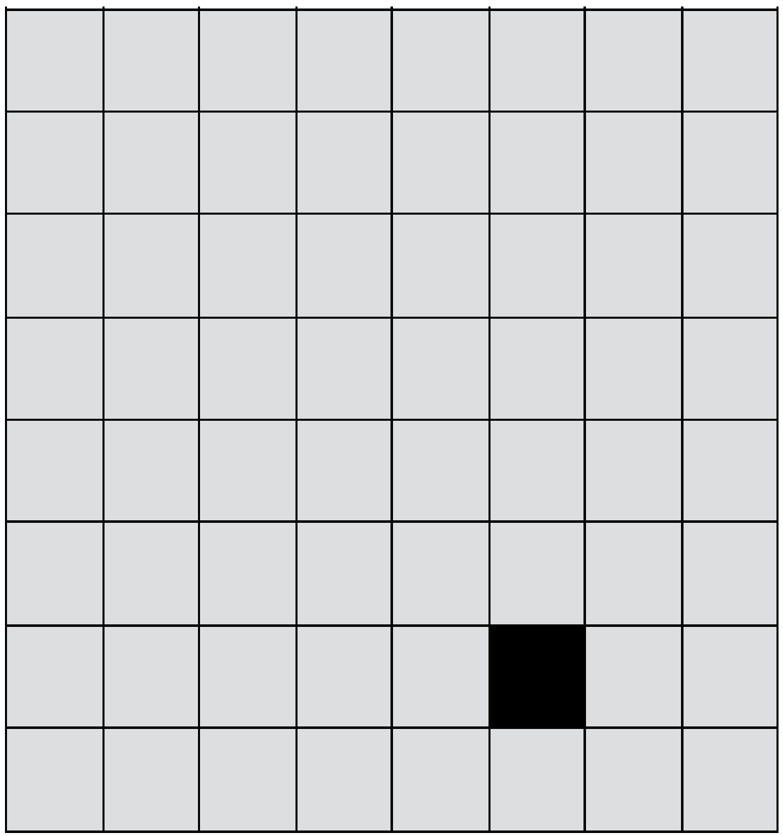


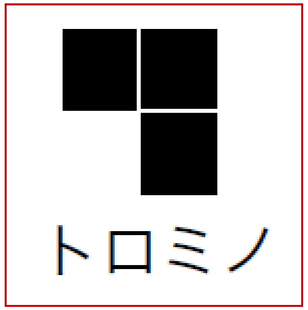
図3

盤面を大きくしましょう

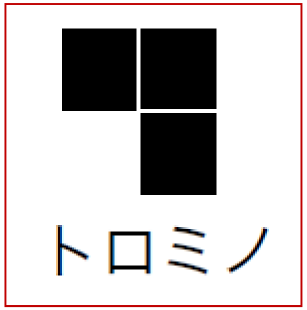
演習6-3

- 1マス欠けた任意の8×8のチェス盤をトロミノで重複なく覆えるか.



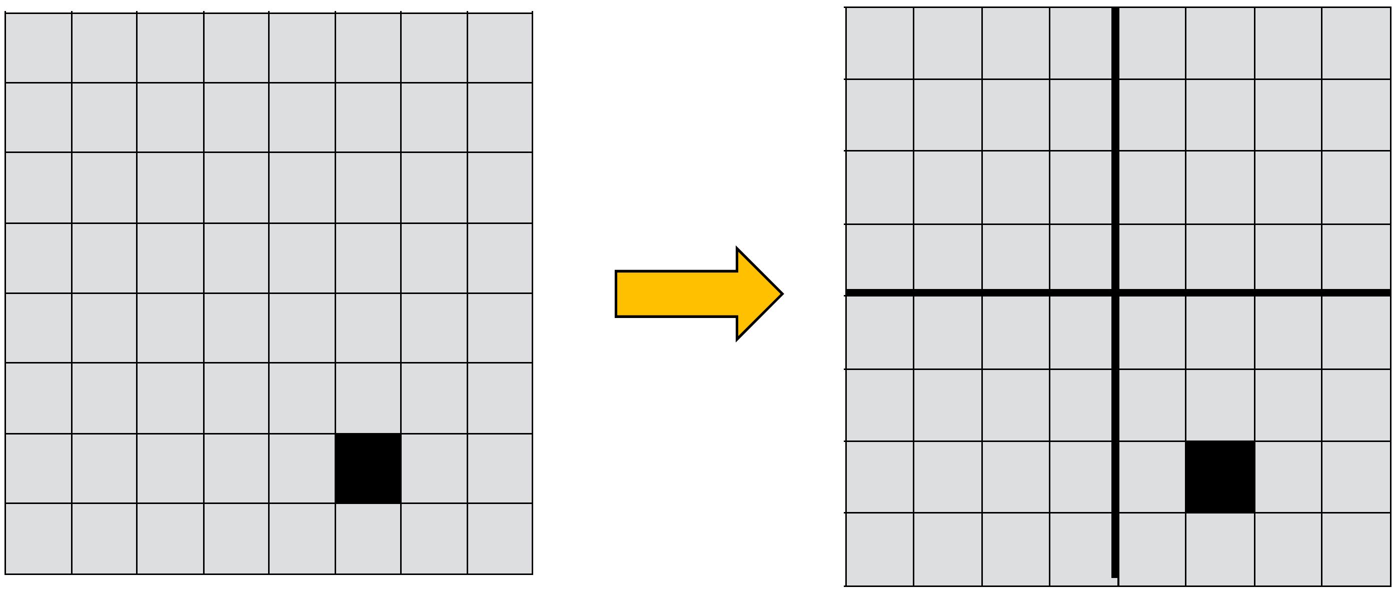


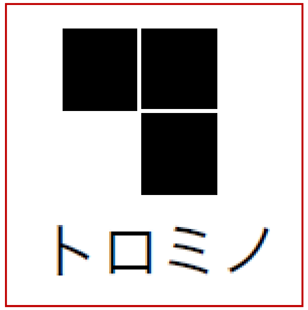
ヒント



演習6-3

- 以下のように４つの4×4のチェス盤の集合とみなす．
- 簡単のため，元々かけているマスは右下の4×4のチェス盤に含まれているとする．(対称性より，欠けたマスは右上，左上，左下のいずれに含まれていてもよい．)
- 1つのトロミノをある位置に置くと…

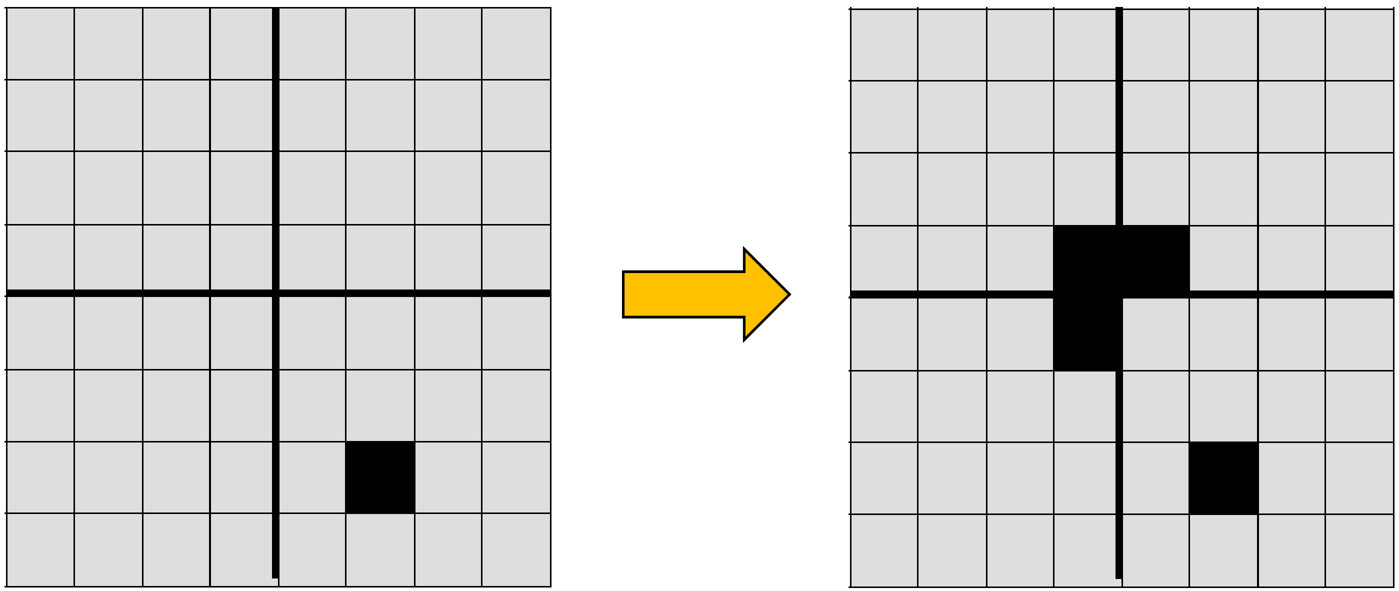




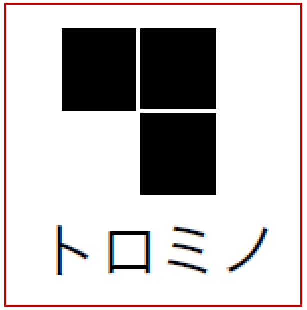
解答例

演習6-3

- 欠けたマス以外の4×4のチェス盤にかかるように，トロミノを１つ置く.

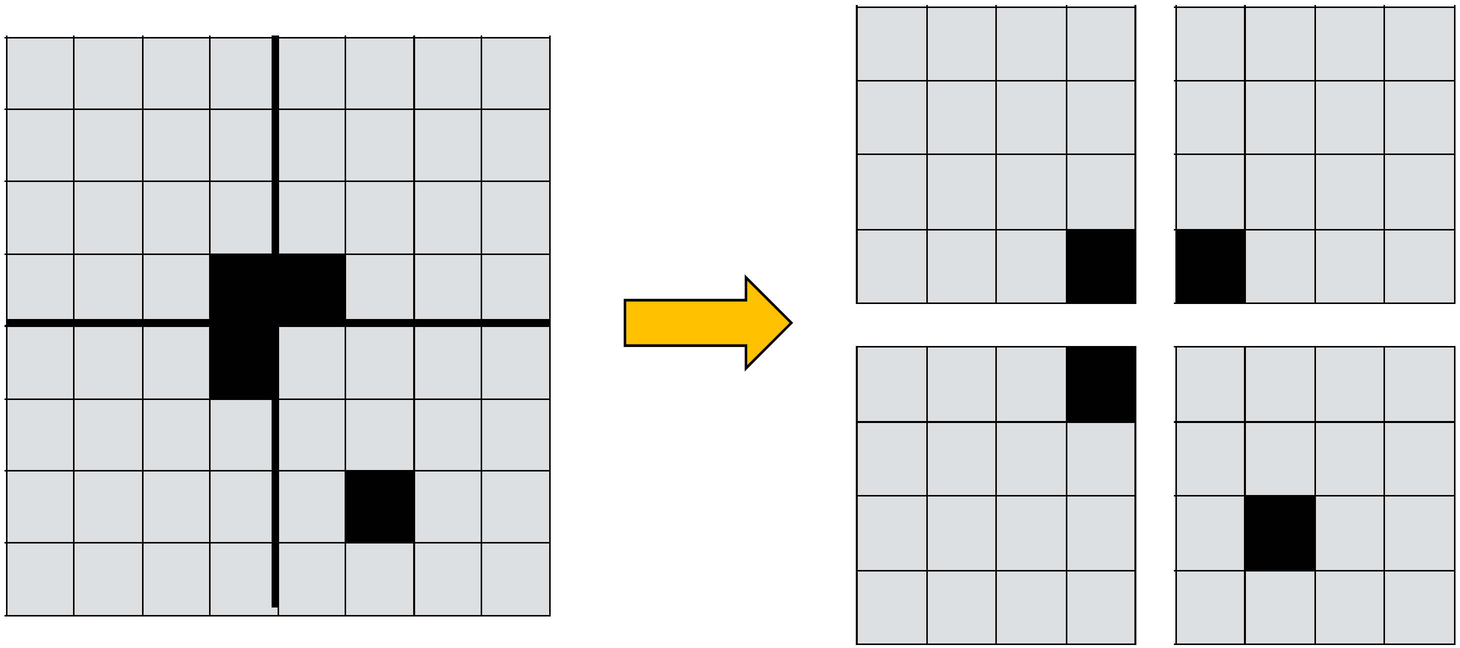


解答例



演習6-4

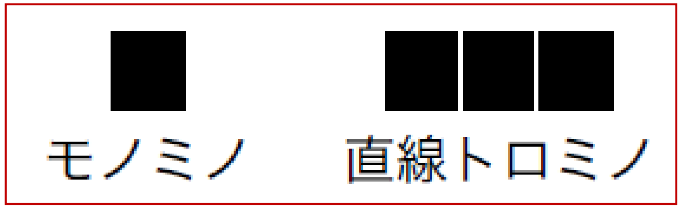
- 問題は以下の４つの4×4のチェス盤に分割すれば，1つ1つのチェス盤の敷き詰めに帰着される(**分割統治法**).
- あとは演習9-2を利用する.



続いて例題です

<u>例題6-4</u>

- 以下のチェス盤を モノミノ1つと直線トロミノで重複なく覆えるか.



- 直線トロミノはいくつ用いてもよい．またモノミノは用いなくても良い.

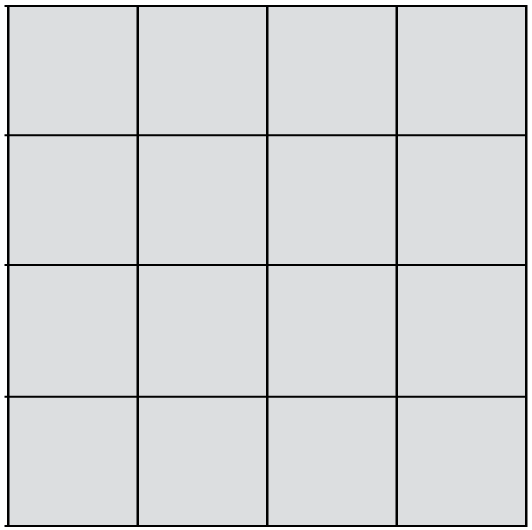


図1

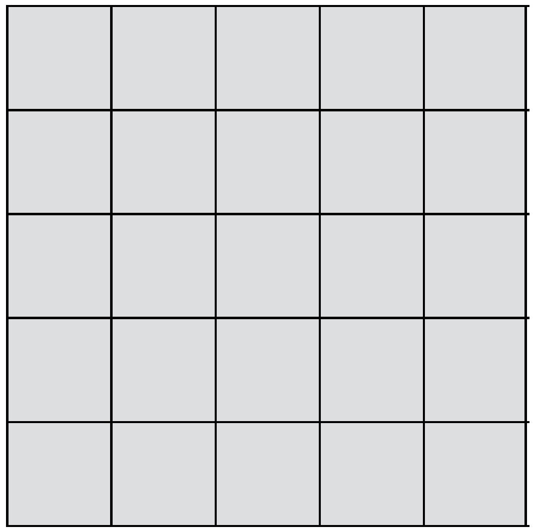
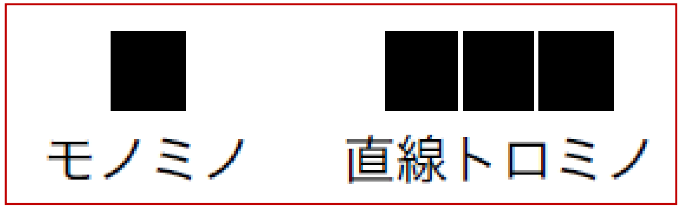


図2

解答例

例題6-4

- 以下のチェス盤を モノミノ1つと直線トロミノで重複なく覆えるか.



- 直線トロミノはいくつ用いてもよい．またモノミノは用いなくても良い.

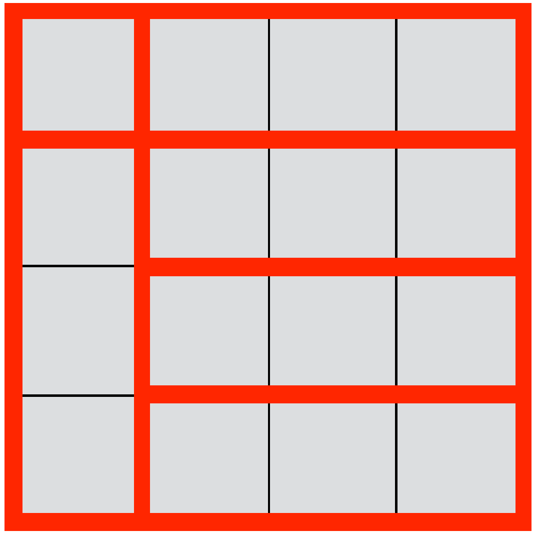


図 1

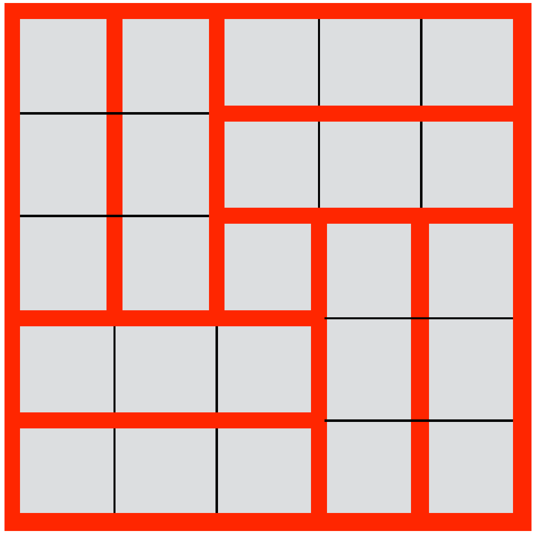
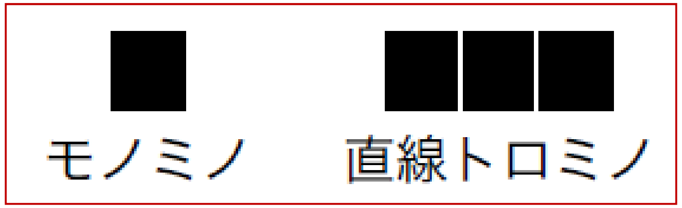


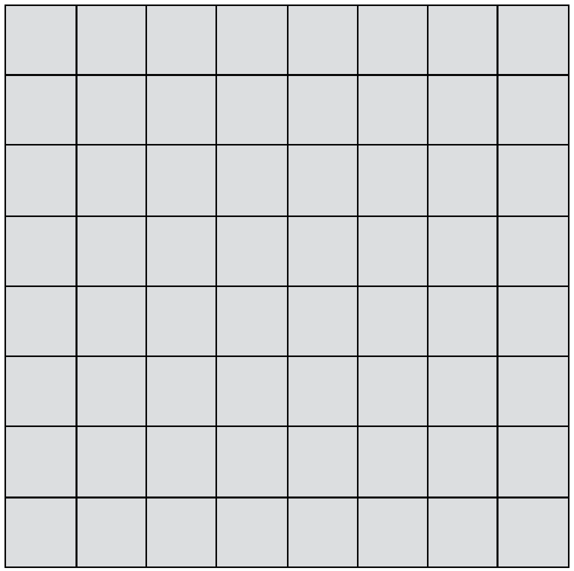
図 2

一般化してみよう



演習6-5

- n×nのチェス盤(ただしn≧3)を
  モノミノ1つと直線トロミノで重複なく覆えるか.
- 直線トロミノはいくつ用いてもよい．またモノミノは用いなくても良い.
- n=3k+3, 3k+4, 3k+5 (kは0以上の整数)で考えてみよう



ヒント

演習6-5

- なぜ，n=3k+3, 3k+4, 3k+5 でよいのか？

(理由)

modの性質より以下が成り立つ.

– $n \bmod 3 = 0$ or 1 or 2

さらに $n \geqq 3$ なので，以下のように表せる.

– $n \bmod 3 = 0 \Rightarrow n = 3k + 3$ ($k \geqq 0$: 整数)

– $n \bmod 3 = 1 \Rightarrow n = 3k + 4$ ($k \geqq 0$: 整数)

– $n \bmod 3 = 2 \Rightarrow n = 3k + 5$ ($k \geqq 0$: 整数)

これらを場合分けして考える.

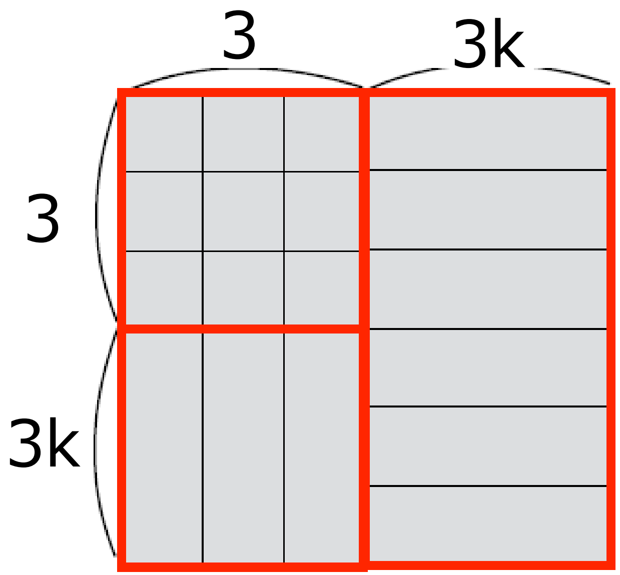
解答例

演習6-5

n = 3k+3 の場合

- チェス盤を以下の３つの部分に分割する(**分割統治法**).
  - 3k部分は直線トロミノをkこ敷き詰めればOK
  - 3×3の部分は3つの直線トロミノで敷き詰められる

    →よって全体を直線トロミノで敷き詰めることが可能



解答例

演習6-5

n = 3k+4, 3k+5 の場合

- チェス盤を以下の３つの部分に分割する(**分割統治法**).
- 全てのパーツは直線トロミノで敷き詰めることができる.
  →よって全体を直線トロミノで敷き詰めることが可能