

# 技術社会システム

## 第5回：縮小・分割統治法

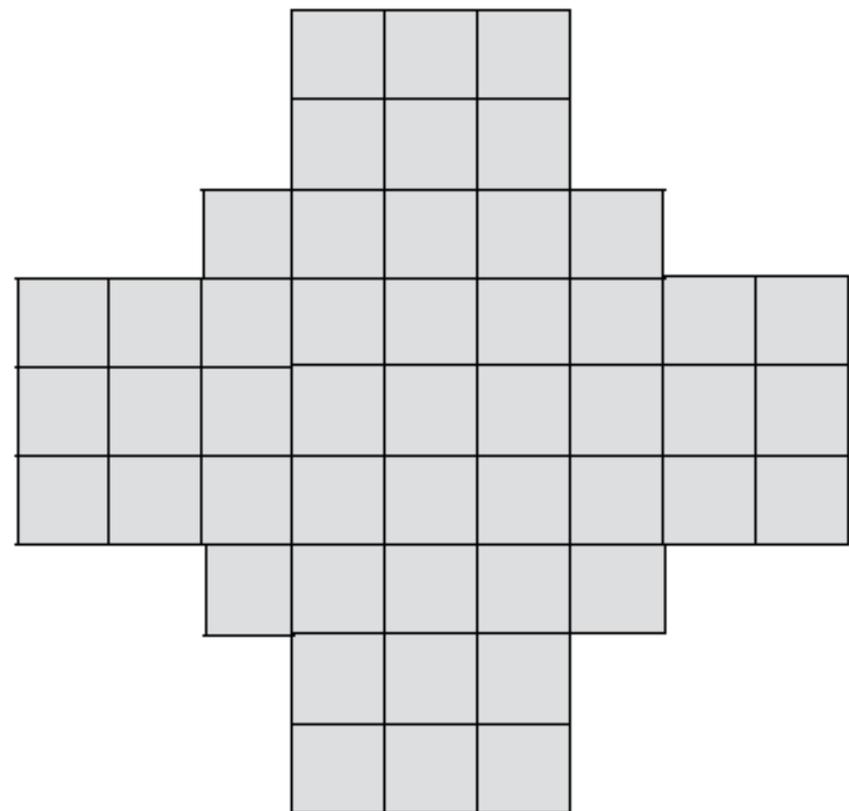
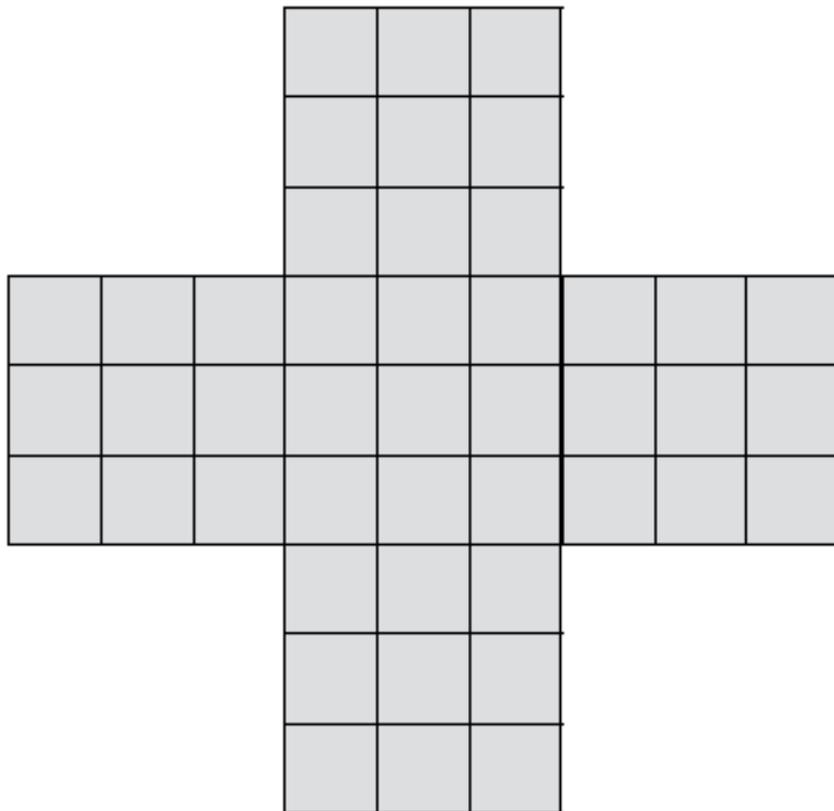
担当教員：蓮池 隆(はすいけ たかし)

連絡先：[thasuike@waseda.jp](mailto:thasuike@waseda.jp)

# 前回の解答です

## 演習4-1

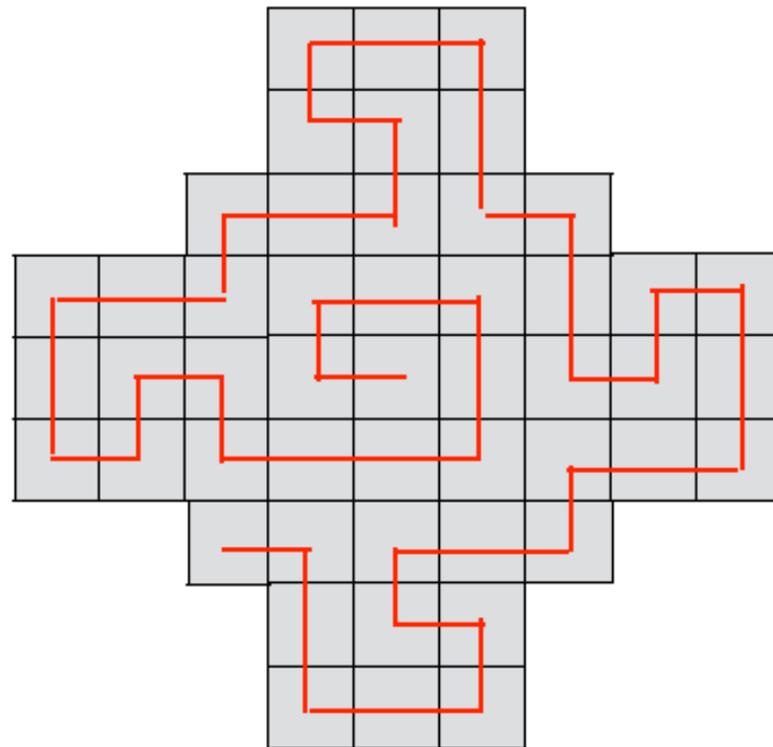
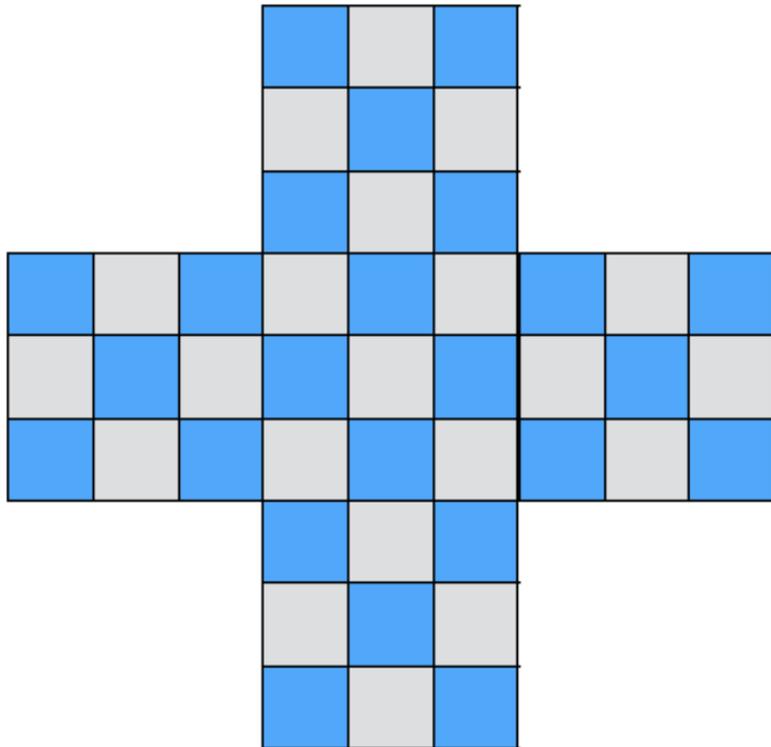
- 以下の盤面において、各タイルを一度ずつ通過するように一筆書きすることはできるか。できるなら道筋を書き、できないならそれを証明せよ。



# 解答

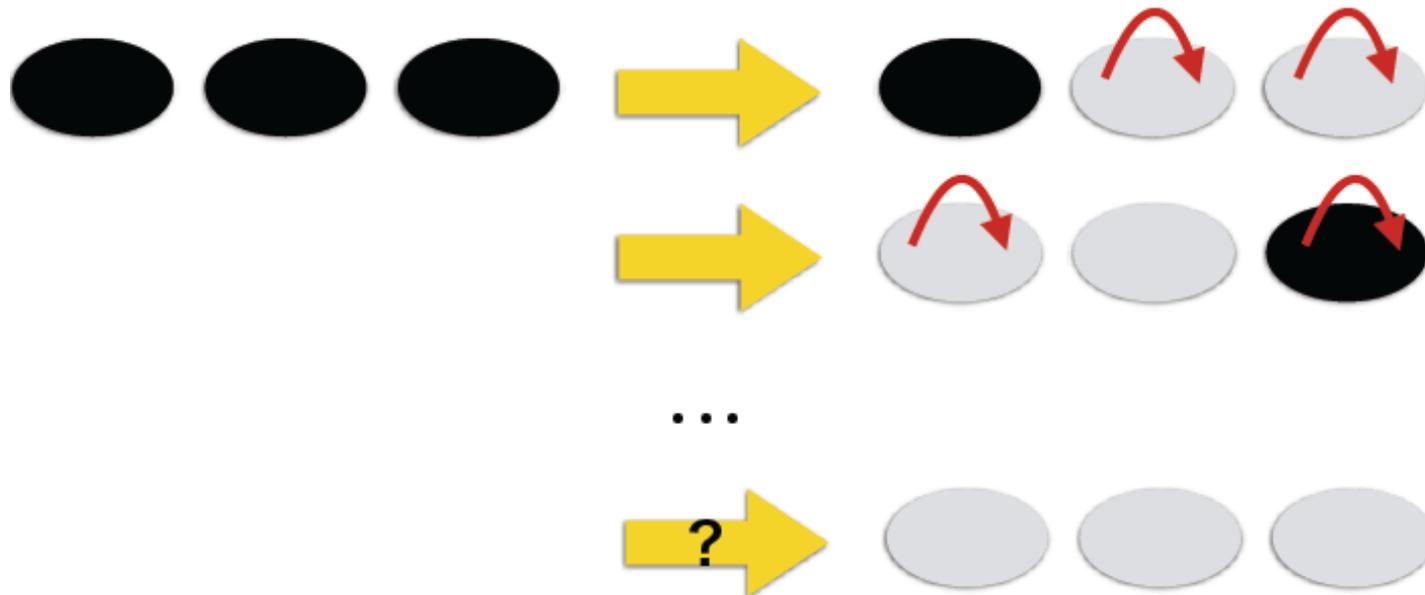
## 演習4-1

- 交互に色をつけると、左は(青：24, 灰色：21)となり、一筆書きでは青色と灰色が交互になるため、青色と灰色が同じ数か1つ違いになる必要がある。  
→よって、左は一筆書きできない！



# 演習4-2'

- **n枚(nは偶数)**のコインが表向き状態で置かれており、以下の操作が可能とする。
- 操作：1枚のコインを選び、それ以外の $n-1$ 枚のコインを反転させる。
- 操作を繰り返すことで、全てのコインを裏向きにできるか？不可能ならそれを証明し、可能なら最小で何回の操作で達成できるか？



# 解答

## nが偶数の場合：可能

( $\because$ )コインに1から  $n$  までの番号を付ける. コイン1からコイン $n$ に対して, 順に操作を行えば全てのコインが裏になる. なぜならば, 各コインは  $n-1$ 回(奇数回)反転するためである.

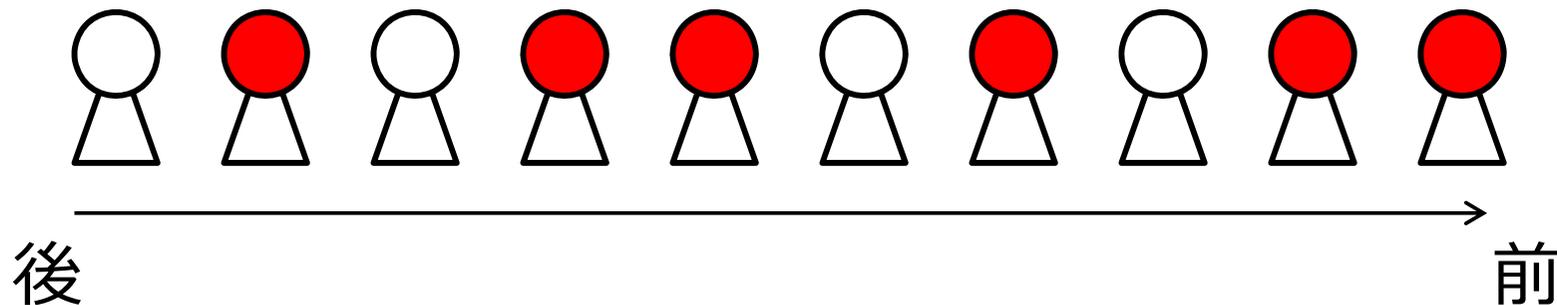
## (前回の復習) nが奇数の場合：不可能

( $\because$ )表を1, 裏を0とする. 全て表の場合は総和が奇数であり, 全て裏の場合は総和は偶数である. 一度の操作で総和の偶奇(パリティ)は変化しないので, コインを全て裏返すことはできない.

# 演習4-3(詳細な解説です)

## 帽子の色当てゲーム

- 10人が1列に整列する.
- 全員に赤か白の帽子をランダムにかぶせる. このとき, 各人は自分より前の全ての人の帽子の色が見え, 後ろの人の帽子の色は見えない.
- **最後尾から最前列の人まで順番に, 自分の帽子の色を“赤”か“白”と1回だけ発声する.** このとき, 前の人 は後ろの人の発声を聞くことができる.



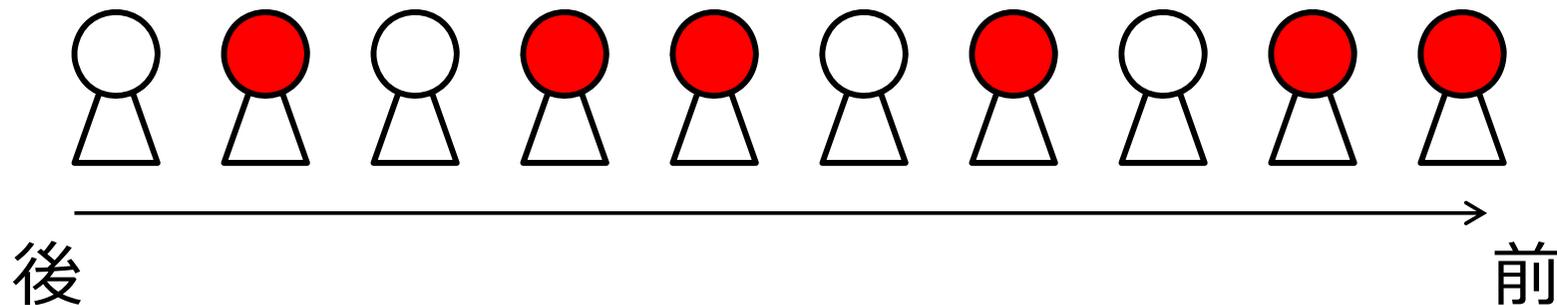
# 演習4-3(詳細な解説です)

## 帽子の色当てゲーム

- 発声により自分の帽子の色を当てた人の合計を全体の得点とする.
- 整列後はお互いに相談できないものとする.

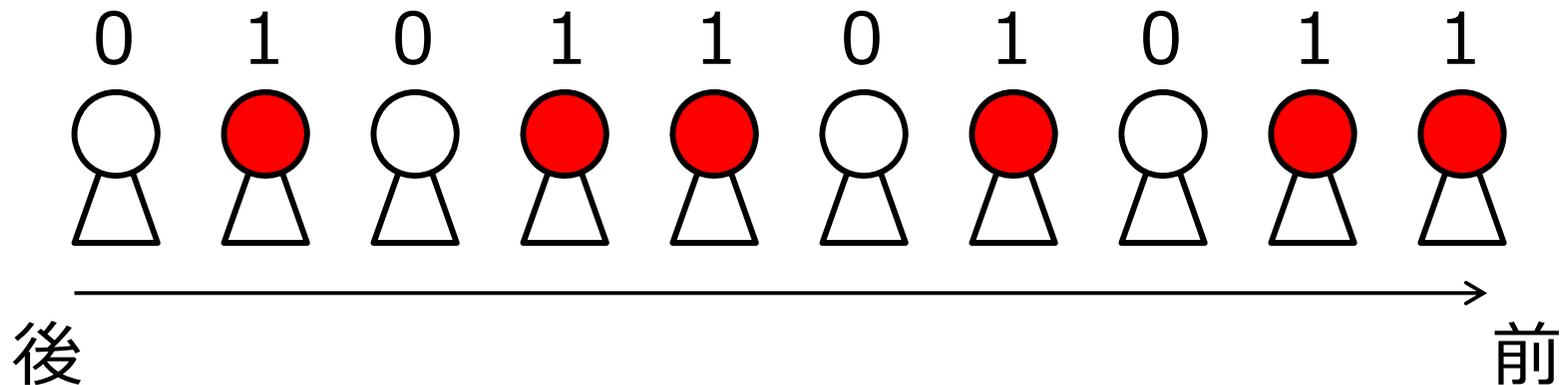
(問題)

全員が協力すると、確実に取れる得点は最大で何点か？  
アルゴリズムも合わせて記しなさい.



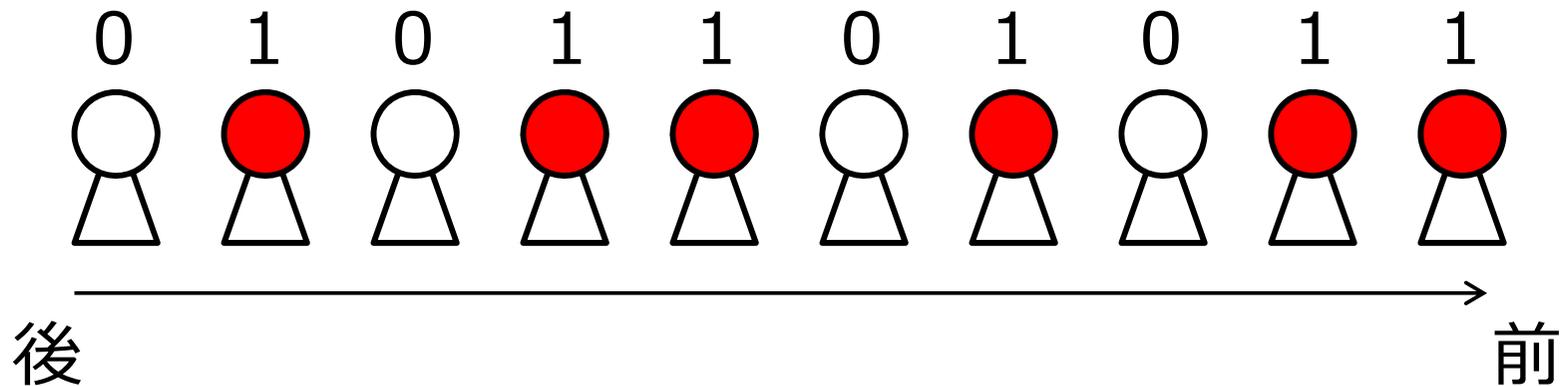
# 解答のための準備

- 以下のように記号を用意し, どの情報を誰が使えるかを考察してみよう.
- **赤を1, 白を0へ変換する.**
- $H(i) = i$  番目の人の帽子の色 (= 0 or 1).
- $P(i) = i$  番目の人より前の人々の帽子の色の総和に(mod 2) を実行したもの  
=  $H(i+1) + H(i+2) + \dots + H(10) \pmod{2}$
- $Q(i) = i$  番目の人が発声した帽子の色 (= 0 or 1).



# 解答のための準備

- 以下のように記号を用意し, どの情報を誰が使えるかを考察してみよう.
- $i$  番目の人の目的:  $H(i)$  を知ること
- $i$  番目の人が使える情報:  
 $Q(1), \dots, Q(i-1), P(i), H(i+1), \dots, H(10)$



# 解答

- **確実に9人**は自分の帽子の色を当てることができる。
- ポイント：赤色の帽子をかぶった人が、奇数or偶数

## アルゴリズム

- 1番目の人： $Q(1) = P(1)$   
(赤色が奇数なら1, 偶数なら0)
- $i$ 番目の人( $i \geq 2$ ):

$$Q(i) = Q(1) + Q(2) + \dots + Q(i-1) + P(i) \pmod{2}$$

つまり、1番目の人が叫んだ結果から「2番目以降の人全体で、赤色の帽子が奇数個なのか偶数個なのか」がわかり、それ以降で「赤と答えた人の人数と自分より前の赤の人の人数の和が奇数か偶数か」で自分の帽子の色がわかる！

# 解答

- **確実に9人**は自分の帽子の色を当てることができる.
- ポイント：赤色の帽子をかぶった人が、奇数or偶数

## アルゴリズム

- 1番目の人： $Q(1) = P(1)$   
(赤色が奇数なら1, 偶数なら0)
- $i$ 番目の人( $i \geq 2$ ):

$$Q(i) = Q(1) + Q(2) + \dots + Q(i-1) + P(i) \pmod{2}$$

(実際に)

$$Q(2) = Q(1) + P(2) = P(1) + P(2)$$

$$= (H(2) + H(3) + \dots) + (H(3) + H(4) + \dots) = H(2)$$

$$(\because n+n \pmod{2} = 0 \text{なので, } H(i) + H(i) \pmod{2} = 0)$$

# 解答

- **確実に9人**は自分の帽子の色を当てることができる.
- ポイント：赤色の帽子をかぶった人が、奇数or偶数

## アルゴリズム

- 1番目の人： $Q(1) = P(1)$   
(赤色が奇数なら1, 偶数なら0)
- $i$ 番目の人( $i \geq 2$ ):

$$Q(i) = Q(1) + Q(2) + \dots + Q(i-1) + P(i) \pmod{2}$$

$$\begin{aligned} Q(3) &= Q(1) + Q(2) + P(3) = (Q(1) + P(3)) + H(2) \\ &= (P(1) + P(3)) + H(2) \\ &= ((H(2) + H(3) + \dots) + (H(4) + H(5) + \dots)) + H(2) \\ &= (H(2) + H(3)) + H(2) = \mathbf{H(3)}, \dots (\text{これが続く}) \end{aligned}$$

# 縮小・分割統治法

縮小統治法

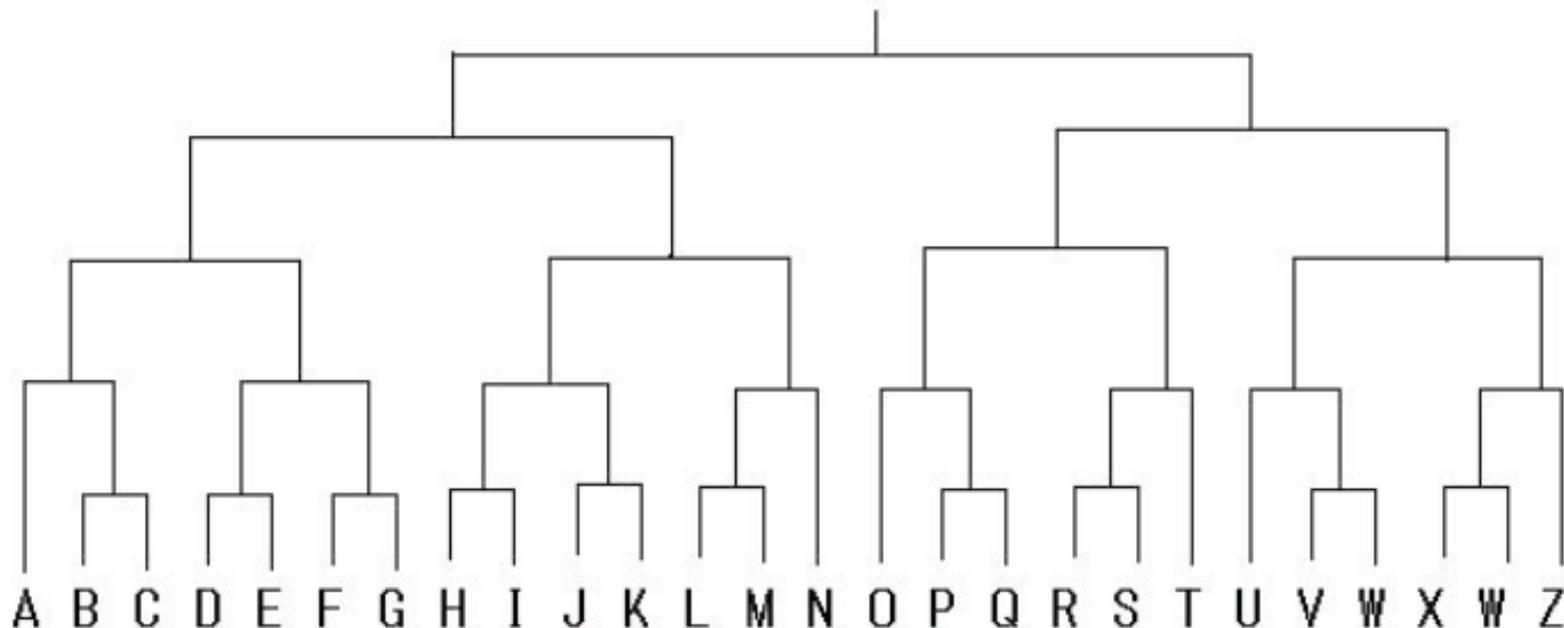
分割統治法

➡これらの考え方は幅広い問題に対して有効！

# 縮小統治法の例題

## 例題5-1(以前の演習1-2)

- 目的: 以下のトーナメント表(26人)で優勝者が決まるまでに合計対戦数を求める.
- 条件: **回数を一つずつ数えるという手順はNG**
- 対戦数を求める手順と, その手順で対戦数が求まる理由を記述しなさい.



# ここが縮小統治法！

## 例題5-1

- **参加者数 $n$ を入力したら、対戦回数として $n-1$ を返す。**
- 先ほどのトーナメントでは参加者は26名なので、25回の対戦が生じる。
- **「優勝者が決まる」ことと「1名を除いて他の参加者が全て負ける」ことは等しい。**
- **1試合行くと、残っている人数は1人減る(縮小統治法)。**
- 繰り返すことで**高々  $n-1$  試合**で優勝者を決定することができる。

# では縮小統治法の演習です

## 演習5-2

- Aさんは1から1,000,000までの数字の中の一つを紙に書いて持っているとする。
- この数を「はい」か「いいえ」で答えられる質問を繰り返し質問していくことで当てる。

(例) 一の位は3ですか? (←ちなみにこれは非効率的)  
1~100,000の間に入ってますか?

- 最悪の場合でも何回以下の質問数で答えを当てることができるか?

(ヒント: ある戦略にしたがい、範囲をうまく設定しながら聞いていけばよい(縮小統治法))

# これも有名な問題です

## 例題5-3

- 外見では区別できない27枚の硬貨がある.
- この中に1枚だけ、本物の硬貨よりも軽い偽造硬貨が含まれているとする.
- このとき、重りのない天秤を使って偽造硬貨を決定する方法を述べよ. また、最悪の場合でも何回以下の試行数で偽物を当てることができるか.



# 解答

## 例題5-3

- **STEP1: 硬貨を3つのグループに等分割する**



グループI



グループII



グループIII

- STEP2: グループIとグループIIを天秤に載せ、重さを比較
- STEP3: STEP2の結果はいずれかになる。
  - グループIのほうが軽い → グループIを残す
  - グループIIのほうが軽い → グループIIを残す
  - グループIとグループIIが釣り合う → グループIIIを残す
- **このとき、残されたグループ内に偽造硬貨が入っている  
→ 候補の数が  $1/3$  になる(縮小統治法)**

# 解答

9つになったコインを先ほどと同じように分割する！

- **STEP1: 硬貨を3つのグループに等分割する**



- STEP2: グループIとグループIIを天秤に載せ, 重さを比較
- STEP3: STEP2の結果はいずれかになる.
  - グループIのほうが軽い → グループIを残す
  - グループIIのほうが軽い → グループIIを残す
  - グループIとグループIIが釣り合う → グループIIIを残す
- **このとき, 残されたグループ内に偽造硬貨が入っている  
→ 候補の数が  $1/3$  になる(縮小統治法)**

# 解答

3つになったコインを先ほどと同じように分割する！

- **STEP1: 硬貨を3つのグループに等分割する**



- STEP2: グループIとグループIIを天秤に載せ、重さを比較
- STEP3: STEP2の結果はいずれかになる。
  - グループIのほうが軽い → グループIを残す
  - グループIIのほうが軽い → グループIIを残す
  - グループIとグループIIが釣り合う → グループIIIを残す
- **残されたコインが偽物！ → よって天秤の使用回数は3回！**

# 少し問題を変形します

## 演習5-4

- 外見では区別できない27枚の硬貨がある.
- この中に1枚だけ、本物の硬貨よりも重さが異なる(重い  
か軽いかは不明)偽造硬貨が含まれているとする.
- このとき、重りのない天秤を使って偽造硬貨を決定する方法を述べよ. また、最悪の場合でも何回以下の試行数で偽物を当てることができるか. 途中過程も記述せよ.

